30º Colóquio Brasileiro de Matemática

IMPA, Rio de Janeiro, 26 a 31 de julho de 2015

Aula 7

Aplicação

Aula 7 - 30 de julho de 2015 - 12h30min às 14h

Aula 7 – Aplicação

Formulação do MEF

- Vamos aproximar em Ω a solução exata do problema por

$$\mathbf{u}_0 \approx \mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{\phi}_i$$

Formulação do MEF

- Vamos aproximar em Ω a solução exata do problema por

$$\mathbf{u}_0 \approx \mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{\phi}_i$$

- Se $\mathbf{u} \in C^2$ satisfizer as condições de contorno, mas não a equação de equilíbrio, então temos um resíduo $\sigma_{jk,j} + b_k \neq 0$

Formulação do MEF

- Vamos aproximar em Ω a solução exata do problema por

$$\mathbf{u}_0 \approx \mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{\phi}_i$$

- Se $\mathbf{u} \in C^2$ satisfizer as condições de contorno, mas não a equação de equilíbrio, então temos um resíduo $\sigma_{jk,j} + b_k \neq 0$
- Queremos tornar o resíduo tão "pequeno" quanto possível em Ω, o que pode ser feito com uma distribuição ponderada

$$\int_{\Omega} \left(\sigma_{jk,j} + b_k\right) u_k^* \, d\Omega = 0$$

em que $\mathbf{u}^*$ é uma função ponderadora (deslocamentos em Ω^*)

Formulação do MEF

- Se a função aproximadora **u** não satisfizer as condições de contorno, então temos os resíduos $u_k - \overline{u}_k \neq 0$ em Γ_u e $p_k - \overline{p}_k \neq 0$ em Γ_p

Formulação do MEF

- Se a função aproximadora **u** não satisfizer as condições de contorno, então temos os resíduos $u_k - \overline{u}_k \neq 0$ em Γ_u e $p_k - \overline{p}_k \neq 0$ em Γ_p
- Sentença original de resíduos ponderados

$$\int_{\Omega} (\sigma_{jk,j} + b_k)\, u_k^* \, d\Omega = \int_{\Gamma_p} (p_k - \overline{p}_k)\, u_k^* \, d\Gamma - \int_{\Gamma_u} (u_k - \overline{u}_k)\, p_k^* \, d\Gamma$$

Aula 7 – Aplicação

Formulação do MEF

- Se a função aproximadora **u** não satisfizer as condições de contorno, então temos os resíduos $u_k - \overline{u}_k \neq 0$ em Γ_u e $p_k - \overline{p}_k \neq 0$ em Γ_p
- Sentença original de resíduos ponderados

$$\int_{\Omega} (\sigma_{jk,j} + b_k)\, u_k^*\, d\Omega = \int_{\Gamma_p} (p_k - \overline{p}_k)\, u_k^*\, d\Gamma - \int_{\Gamma_u} (u_k - \overline{u}_k)\, p_k^*\, d\Gamma$$

- Forma fraca de resíduos ponderados

$$\int_{\Omega} \sigma_{jk}\, \epsilon_{jk}^*\, d\Omega - \int_{\Omega} b_k\, u_k^*\, d\Omega = \int_{\Gamma_p} \overline{p}_k\, u_k^*\, d\Gamma + \int_{\Gamma_u} p_k\, u_k^*\, d\Gamma$$

(1) Ordem menor de continuidade para **u** (mas maior para $\mathbf{u}^*$)
(2) **u** satisfaz as condições de contorno essenciais: $u_k \equiv \overline{u}_k$ em Γ_u

Formulação do MEF

- Princípio dos trabalhos virtuais (PTV)

  Se escolhermos uma função ponderadora $\mathbf{u} = \delta\mathbf{u}$ tal que $u_k^* = \delta u_k \equiv 0$ em Γ_u, então a forma forma fica

$$\int_{\Omega} \sigma_{jk}\,\delta\epsilon_{jk}\,d\Omega = \int_{\Omega} b_k\,\delta u_k\,d\Omega + \int_{\Gamma_p} \overline{p}_k\,\delta u_k\,d\Gamma$$

  - A função ponderadora $\delta\mathbf{u}$ é definida pelas mesmas funções usadas na função aproximadora $\mathbf{u}$ (método de Galerkin)
  - Os deslocamentos “virtuais” devem ser cinematicamente admissíveis

Formulação do MEF

- Princípio dos trabalhos virtuais (PTV)

Se escolhermos uma função ponderadora $\mathbf{u} = \delta\mathbf{u}$ tal que $u_k^* = \delta u_k \equiv 0$ em Γ_u, então a forma forma fica

$$\int_{\Omega} \sigma_{jk}\, \delta\epsilon_{jk}\, d\Omega = \int_{\Omega} b_k\, \delta u_k\, d\Omega + \int_{\Gamma_p} \overline{p}_k\, \delta u_k\, d\Gamma$$

- A função ponderadora $\delta\mathbf{u}$ é definida pelas mesmas funções usadas na função aproximadora $\mathbf{u}$ (método de Galerkin)
- Os deslocamentos "virtuais" devem ser cinematicamente admissíveis

Em notação matricial:

$$\int_{\Omega} \delta\boldsymbol{\epsilon}^{\mathsf{T}}\, \boldsymbol{\sigma}\, d\Omega = \int_{\Omega} \delta\mathbf{u}^{\mathsf{T}}\, \mathbf{b}\, d\Omega + \int_{\Gamma_p} \delta\mathbf{u}^{\mathsf{T}}\, \mathbf{p}\, d\Gamma$$

Aula 7 – Aplicação

Modelo discreto do MEF

- Subdivisão de Ω em NE elementos finitos e NN nós

Modelo discreto do MEF

- Subdivisão de Ω em NE elementos finitos e NN nós
- Cada elemento finito e provê uma parte da função aproximadora $\mathbf{u}$

$$\mathbf{u}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1^{(e)} & \mathbf{N}_2^{(e)} & \cdots & \mathbf{N}_n^{(e)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^{(e)} \\ \mathbf{u}_2^{(e)} \\ \cdots \\ \mathbf{u}_n^{(e)} \end{bmatrix} = \mathbf{N}^{(e)}\,\mathbf{U}^{(e)}$$

  - $\mathbf{U}^{(e)}$: vetor dos deslocamentos de todos os nós do elemento
  - $\mathbf{N}^{(e)}$: matriz de funções de forma do elemento

Aula 7 – Aplicação

Modelo discreto do MEF

- Subdivisão de Ω em NE elementos finitos e NN nós
- Cada elemento finito e provê uma parte da função aproximadora $\mathbf{u}$

$$\mathbf{u}^{(e)} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{N}_i^{(e)} \mathbf{u}_i^{(e)} = \mathbf{N}^{(e)}\, \mathbf{U}^{(e)}$$

  - $\mathbf{U}^{(e)}$: vetor dos deslocamentos de todos os nós do elemento
  - $\mathbf{N}^{(e)}$: matriz de funções de forma do elemento

$$\boldsymbol{\epsilon}^{(e)} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{B}_i^{(e)} \mathbf{u}_i^{(e)} = \mathbf{B}^{(e)}\, \mathbf{U}^{(e)}$$

  - $\mathbf{B}^{(e)}$: matriz de deformação-deslocamento do elemento

Modelo discreto do MEF

- Subdivisão de Ω em NE elementos finitos e NN nós
- Cada elemento finito e provê uma parte da função aproximadora $\mathbf{u}$

$$\mathbf{u}^{(e)} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{N}_i^{(e)} \mathbf{u}_i^{(e)} = \mathbf{N}^{(e)}\, \mathbf{U}^{(e)}$$

  - $\mathbf{U}^{(e)}$: vetor dos deslocamentos de todos os nós do elemento
  - $\mathbf{N}^{(e)}$: matriz de funções de forma do elemento

$$\boldsymbol{\epsilon}^{(e)} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{B}_i^{(e)} \mathbf{u}_i^{(e)} = \mathbf{B}^{(e)}\, \mathbf{U}^{(e)}$$

  - $\mathbf{B}^{(e)}$: matriz de deformação-deslocamento do elemento

$$\boldsymbol{\sigma}^{(e)} = \mathbf{C}^{(e)}\, \mathbf{B}^{(e)}\, \mathbf{U}^{(e)}$$

  - $\mathbf{C}^{(e)}$: matriz constitutiva do elemento

Modelo discreto do MEF

- Para cada elemento finito e:

$$\int\limits_{\Omega^{(e)}} \left[\mathbf{B}^{(e)}\right]^{\mathsf{T}} \mathbf{C}^{(e)} \mathbf{B}^{(e)} \mathbf{U}^{(e)} d\Omega = \int\limits_{\Omega^{(e)}} \left[\mathbf{N}^{(e)}\right]^{\mathsf{T}} \mathbf{b}^{(e)} d\Omega + \int\limits_{\Gamma_p^{(e)}} \left[\mathbf{N}^{(e)}\right]^{\mathsf{T}} \mathbf{p}^{(e)} d\Gamma$$

Modelo discreto do MEF

- Para cada elemento finito e:

$$\int_{\Omega^{(e)}} \left[\mathbf{B}^{(e)}\right]^{\mathsf{T}} \mathbf{C}^{(e)} \mathbf{B}^{(e)} \mathbf{U}^{(e)} d\Omega = \int_{\Omega^{(e)}} \left[\mathbf{N}^{(e)}\right]^{\mathsf{T}} \mathbf{b}^{(e)} d\Omega + \int_{\Gamma_p^{(e)}} \left[\mathbf{N}^{(e)}\right]^{\mathsf{T}} \mathbf{p}^{(e)} d\Gamma$$

$$\mathbf{K}^{(e)} \mathbf{U}^{(e)} = \mathbf{F}_b^{(e)} + \mathbf{F}_p^{(e)} = \mathbf{F}^{(e)}$$

  - $\mathbf{K}^{(e)}$: matriz de rigidez do elemento
  - $\mathbf{F}^{(e)}$: vetor de carregamentos nodais equivalentes do elemento

Modelo discreto do MEF

- Para cada elemento finito e:

$$\mathbf{K}^{(e)}\mathbf{U}^{(e)} = \mathbf{F}_b^{(e)} + \mathbf{F}_p^{(e)} = \mathbf{F}^{(e)}$$

  - $\mathbf{K}^{(e)}$: matriz de rigidez do elemento
  - $\mathbf{F}^{(e)}$: vetor de carregamentos nodais equivalentes do elemento

- Para todos os NE elementos finitos:

$$\sum_{e=1}^{\mathrm{NE}} \mathbf{K}^{(e)}\,\mathbf{U}^{(e)} = \sum_{e=1}^{\mathrm{NE}} \mathbf{F}^{(e)}$$

Modelo discreto do MEF

- Para cada elemento finito e:

$$\mathbf{K}^{(e)}\mathbf{U}^{(e)} = \mathbf{F}_b^{(e)} + \mathbf{F}_p^{(e)} = \mathbf{F}^{(e)}$$

  - $\mathbf{K}^{(e)}$: matriz de rigidez do elemento
  - $\mathbf{F}^{(e)}$: vetor de carregamentos nodais equivalentes do elemento

- Para todos os NE elementos finitos:

$$\sum_{e=1}^{\mathrm{NE}} \mathbf{K}^{(e)}\,\mathbf{U}^{(e)} = \sum_{e=1}^{\mathrm{NE}} \mathbf{F}^{(e)}$$

$$\mathbf{K}\,\mathbf{U} = \mathbf{F}$$

  - $\mathbf{K}$: matriz de rigidez global
  - $\mathbf{F}$: vetor de carregamentos nodais equivalentes
  - $\mathbf{U}$: vetor de deslocamentos de todos os nós do modelo discreto

Esquema computacional do MEF

- Discretização do corpo (pré-processamento)

Esquema computacional do MEF

- Discretização do corpo (pré-processamento)
- Computação das contribuições dos elementos

Aula 7 – Aplicação

Esquema computacional do MEF

- Discretização do corpo (pré-processamento)
- Computação das contribuições dos elementos
- Montagem do sistema linear

Aula 7 – Aplicação

Algoritmo 1 Montagem do sistema linear

para $e = 1, 2, \ldots, \mathrm{NE}$ **faça**

$n \leftarrow$ número de nós de e

para $i = 1, 2, \ldots, n$ **faça**

para $a = 1, 2, \ldots, d$ **faça**

$l \leftarrow (i - 1) \times d + a$

$r \leftarrow (v^{(i)} - 1) \times d + a$

$F_r \leftarrow F_r + F_l^{(e)}$

para $j = 1, 2, \ldots, n$ **faça**

para $b = 1, 2, \ldots, d$ **faça**

$c \leftarrow (j - 1) \times d + b$

$s \leftarrow (v^{(j)} - 1) \times d + b$

$K_{rs} \leftarrow K_{rs} + K_{lc}^{(e)}$

fim para

fim para

fim para

fim para

fim para

Aula 7 – Aplicação

Esquema computacional do MEF

- Discretização do corpo (pré-processamento)
- Computação das contribuições dos elementos
- Montagem do sistema linear
- Aplicação das condições de contorno essenciais

Aula 7 – Aplicação

Algoritmo 2 Numeração dos graus de liberdade incógnitos

para $i = 1, 2, \ldots, \mathrm{NV}$ **faça**
  $r \leftarrow (V_i.v - 1) \times d + V_i.a$
  $U_r \leftarrow V_i.u$
  $R_r \leftarrow -r$
fim para
$r \leftarrow 0$
para $l = 1, 2, \ldots, \mathrm{NN} \times d$ **faça**
  se $R_l = 0$ **então**
    $r \leftarrow r + 1$
    $R_l \leftarrow r$
  fim se
fim para
devolva r

Aula 7 – Aplicação

Algoritmo 3 Montagem do sistema com condições de contorno

para $e = 1, 2, \ldots, \mathrm{NE}$ **faça**
  $n \leftarrow$ número de nós de e
  para $l = 1, 2, \ldots, n \times d$ **faça**
    $r \leftarrow R_l^{(e)}$
    se $r > 0$ **então**
      $F_r \leftarrow F_r + F_l^{(e)}$
      para $c = 1, 2, \ldots, n \times d$ **faça**
        $s \leftarrow R_c^{(e)}$
        se $s > 0$ **então**
          $K_{rs} \leftarrow K_{rs} + K_{lc}^{(e)}$
        senão
          $F_r \leftarrow F_r - K_{lc}^{(e)} \times U_{-s}$
        fim se
      fim para
    fim se
  fim para
fim para

Esquema computacional do MEF

- Discretização do corpo (pré-processamento)
- Computação das contribuições dos elementos
- Montagem do sistema linear
- Aplicação das condições de contorno essenciais
- Solução do sistema linear

Esquema computacional do MEF

- Discretização do corpo (pré-processamento)
- Computação das contribuições dos elementos
- Montagem do sistema linear
- Aplicação das condições de contorno essenciais
- Solução do sistema linear
- Computação de valores no domínio (pós-processamento)

Aula 7 – Aplicação

Esquema computacional do MEF

- Discretização do corpo (pré-processamento)
- Computação das contribuições dos elementos
- Montagem do sistema linear
- Aplicação das condições de contorno essenciais
- Solução do sistema linear
- Computação de valores no domínio (pós-processamento)

Vamos ao código...