



30^o Colóquio Brasileiro de Matemática

IMPA, Rio de Janeiro, 26 a 31 de julho de 2015

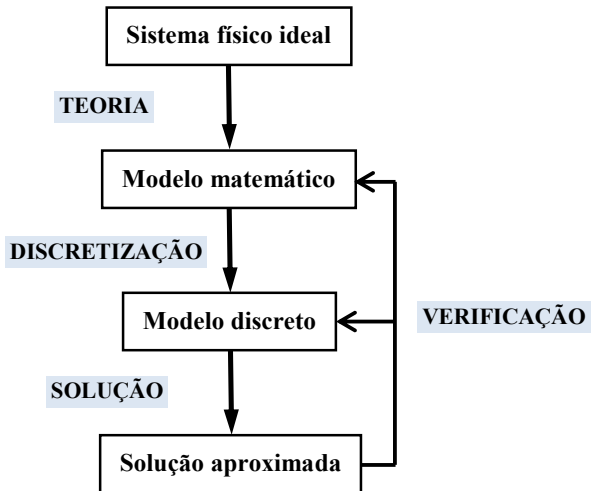


Aula 6

Aplicação

Aula 6 - 30 de julho de 2015 - 13h30min às 14h

Processo de análise via MEF



Aula 6 – Aplicação

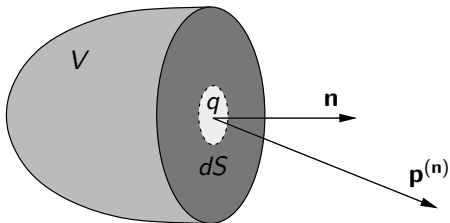
Problema: estado plano de tensões

- ▶ Forças de volume, b_i , e de superfície, $p_i^{(n)}$

Aula 6 – Aplicação

Problema: estado plano de tensões

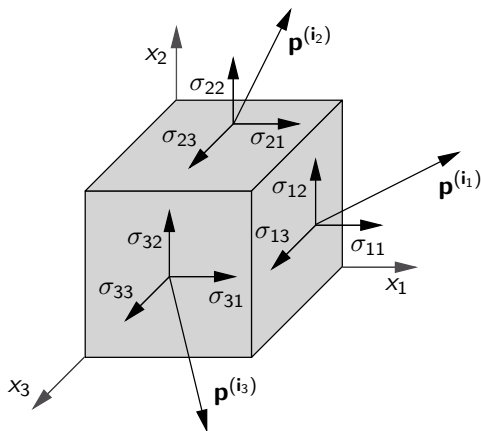
- ▶ Forças de volume, b_i , e de superfície, $p_i^{(n)}$
- ▶ Tensão



Aula 6 – Aplicação

Problema: estado plano de tensões

- ▶ Forças de volume, b_i , e de superfície, $p_i^{(n)}$
- ▶ Tensor de tensões de Cauchy, σ



Problema: estado plano de tensões

- ▶ Forças de volume, b_i , e de superfície, $p_i^{(n)}$
- ▶ Tensor de tensões de Cauchy, σ

$$\sigma = [\mathbf{p}^{(i_1)} \quad \mathbf{p}^{(i_2)} \quad \mathbf{p}^{(i_3)}]^\top = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

Problema: estado plano de tensões

- ▶ Forças de volume, b_i , e de superfície, $p_i^{(n)}$
- ▶ Tensor de tensões de Cauchy, σ

$$\sigma = [\mathbf{p}^{(i_1)} \quad \mathbf{p}^{(i_2)} \quad \mathbf{p}^{(i_3)}]^\top = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{ij} = p_j^{(i_i)}$$

Aula 6 – Aplicação

Problema: estado plano de tensões

- ▶ Forças de volume, b_i , e de superfície, $p_i^{(n)}$
- ▶ Tensor de tensões de Cauchy, σ
- ▶ Transformação de tensão de Cauchy: $p_i^{(n)} = \sigma_{ji}n_j$

Aula 6 – Aplicação

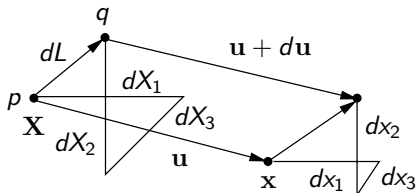
Problema: estado plano de tensões

- ▶ Forças de volume, b_i , e de superfície, $p_i^{(n)}$
- ▶ Tensor de tensões de Cauchy, σ
- ▶ Transformação de tensão de Cauchy: $p_i^{(n)} = \sigma_{ji}n_j$
- ▶ Equilíbrio estático: $\sigma_{ji,j} + b_i = 0$

Aula 6 – Aplicação

Problema: estado plano de tensões

- ▶ Forças de volume, b_i , e de superfície, $p_i^{(n)}$
- ▶ Tensor de tensões de Cauchy, σ
- ▶ Transformação de tensão de Cauchy: $p_i^{(n)} = \sigma_{ji}n_j$
- ▶ Equilíbrio estático: $\sigma_{ji,j} + b_i = 0$
- ▶ Pequenos deslocamentos, u_i , e pequenas deformações, ϵ_{ij}



$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

Problema: estado plano de tensões

- ▶ Forças de volume, b_i , e de superfície, $p_i^{(n)}$
- ▶ Tensor de tensões de Cauchy, σ
- ▶ Transformação de tensão de Cauchy: $p_i^{(n)} = \sigma_{ji} n_j$
- ▶ Equilíbrio estático: $\sigma_{ji,j} + b_i = 0$
- ▶ Pequenos deslocamentos, u_i , e pequenas deformações, ϵ_{ij}
- ▶ Lei de Hooke: $\sigma_{ij} = C_{ijrs} \epsilon_{rs}$

Problema: estado plano de tensões

- ▶ Forças de volume, b_i , e de superfície, $p_i^{(n)}$
- ▶ Tensor de tensões de Cauchy, σ
- ▶ Transformação de tensão de Cauchy: $p_i^{(n)} = \sigma_{ji} n_j$
- ▶ Equilíbrio estático: $\sigma_{ji,j} + b_i = 0$
- ▶ Pequenos deslocamentos, u_i , e pequenas deformações, ϵ_{ij}
- ▶ Lei de Hooke isótropa: $\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}$

Modelo matemático geral da elastostática

▶ Hipóteses

- ▶ Material é contínuo, homogêneo, isotrópico e elástico
- ▶ Forças são aplicadas estaticamente
- ▶ Pequenos deslocamentos e pequenas deformações

Modelo matemático geral da elastostática

- ▶ Hipóteses
 - ▶ Material é contínuo, homogêneo, isotrópico e elástico
 - ▶ Forças são aplicadas estaticamente
 - ▶ Pequenos deslocamentos e pequenas deformações
- ▶ 3 equações de equilíbrio
- ▶ 6 equações deformação-deslocamento
- ▶ 6 relações constitutivas

Modelo matemático geral da elastostática

▶ Hipóteses

- ▶ Material é contínuo, homogêneo, isotrópico e elástico
- ▶ Forças são aplicadas estaticamente
- ▶ Pequenos deslocamentos e pequenas deformações

▶ 3 equações de equilíbrio

▶ 6 equações deformação-deslocamento

▶ 6 relações constitutivas

$$G u_{j,kk} + \frac{G}{1-2\nu} u_{k,jk} + b_j = 0$$

Modelo matemático geral da elastostática

▶ Hipóteses

- ▶ Material é contínuo, homogêneo, isótropo e elástico
- ▶ Forças são aplicadas estaticamente
- ▶ Pequenos deslocamentos e pequenas deformações

▶ 3 equações de equilíbrio

▶ 6 equações deformação-deslocamento

▶ 6 relações constitutivas

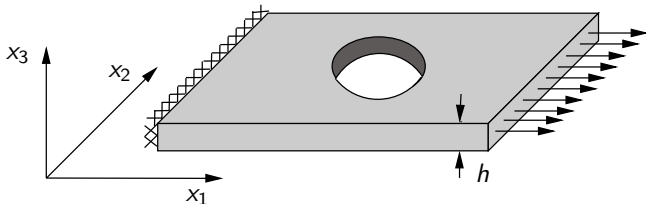
▶ Condições de contorno em $\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_p$

- ▶ Deslocamentos prescritos \bar{u}_i em Γ_u (essenciais)
- ▶ Forças de superfície prescritas \bar{p}_i em Γ_p (naturais)
- ▶ Condições de contorno mistas

Problema: estado plano de tensões

► Hipóteses adicionais

- Corpo é uma **membrana**
- Carregamentos paralelos ao plano da membrana
- Tensões constantes ao longo da espessura da membrana
- $\sigma_{i3} = \sigma_{3i} = 0$



Problema: estado plano de tensões

▶ Hipóteses adicionais

- ▶ Corpo é uma **membrana**
- ▶ Carregamentos paralelos ao plano da membrana
- ▶ Tensões constantes ao longo da espessura da membrana
- ▶ $\sigma_{i3} = \sigma_{3i} = 0$

▶ Lei de Hooke isótropa: $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\epsilon}$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ 2\epsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{C} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$