impa

30º Colóquio Brasileiro de Matemática

IMPA, Rio de Janeiro, 26 a 31 de julho de 2015

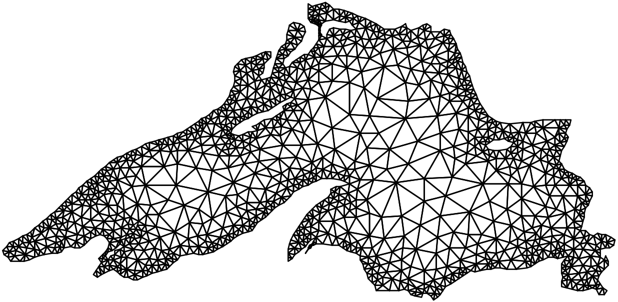
Aula 2

Fundamentos

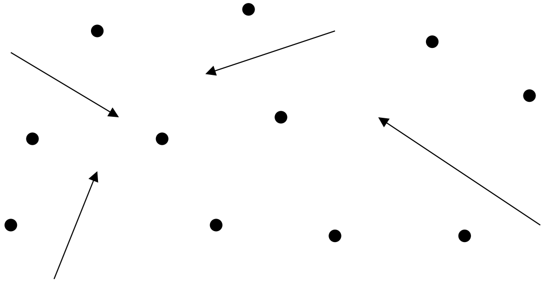
Aula 2 - 27 de julho de 2015 - 13h às 14h

Aula 2 – Fundamentos

- Malhas
  - pontos (vértices)
  - segmentos de reta (arestas)
  - triângulos

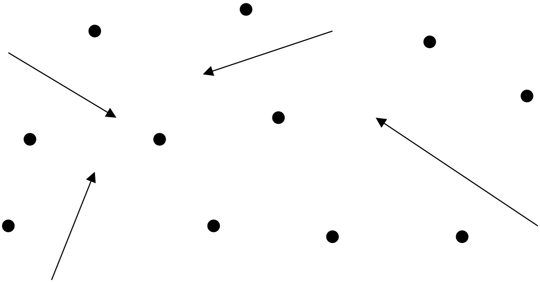


- O espaço afim euclidiano d-dimensional, $\mathbb{E}^d$.
    - pontos
    - vetores



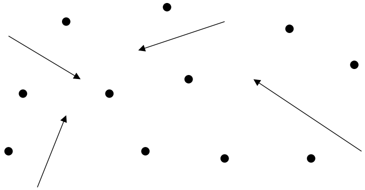
Aula 2 – Fundamentos

- O espaço afim euclidiano d-dimensional, $\mathbb{E}^d$.
  - pontos
  - vetores



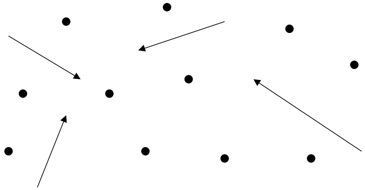
- Pontos e vetores não devem ser tratados da mesma forma!

- Vetores em $\mathbb{E}^d$:
  - representados por segmentos de reta orientados
  - possuem comprimento e direção
  - não são afetados por translações



Aula 2 – Fundamentos

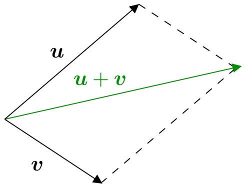
- Vetores em $\mathbb{E}^d$:
  - representados por segmentos de reta orientados
  - possuem comprimento e direção
  - não são afetados por translações

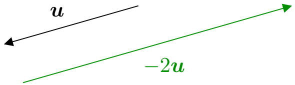


- Pontos em $\mathbb{E}^d$:
  - não possuem comprimento
  - não possuem direção
  - possuem posição fixa (são afetados por translações)

Aula 2 – Fundamentos

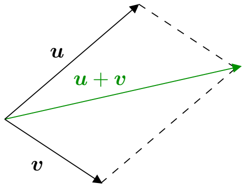
- Vetores em $\mathbb{E}^d$:
  - adição
  - multiplicação por escalar

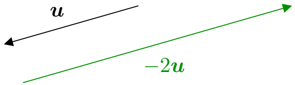




Aula 2 – Fundamentos

- Vetores em $\mathbb{E}^d$:
  - adição
  - multiplicação por escalar

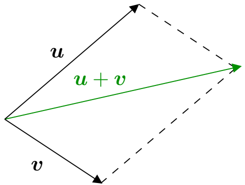


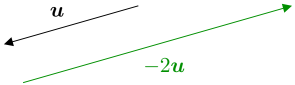


- Pontos em $\mathbb{E}^d$:
  - faz sentido somar dois pontos?
  - faz sentido multiplicar um ponto por um escalar?

Aula 2 – Fundamentos

- Vetores em $\mathbb{E}^d$:
  - adição
  - multiplicação por escalar





- Pontos em $\mathbb{E}^d$:
  - faz sentido somar dois pontos?
  - faz sentido multiplicar um ponto por um escalar?

- Em geral, não! Mas, há uma exceção importante...

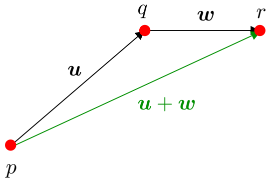
Aula 2 – Fundamentos

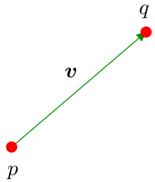
- Pontos e vetores em $\mathbb{E}^d$:

Aula 2 – Fundamentos

- Pontos e vetores em $\mathbb{E}^d$:
- Para quaisquer pontos p e q e vetores $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{w}$ em $\mathbb{E}^d$, temos:

(A1) $p + \mathbf{0} = p$
(A2) $(p + \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{w} = p + (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w})$
(A3) há um único vetor $\boldsymbol{v}$ em $\mathbb{E}^d$ tal que $q = p + \boldsymbol{v}$

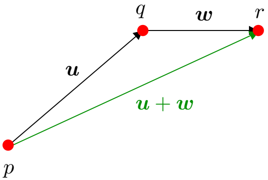


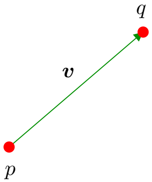


Aula 2 – Fundamentos

- Pontos e vetores em $\mathbb{E}^d$:

- Para quaisquer pontos p e q e vetores $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{w}$ em $\mathbb{E}^d$, temos:
  (A1) $p + \mathbf{0} = p$
  (A2) $(p + \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{w} = p + (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w})$
  (A3) há um único vetor $\boldsymbol{v}$ em $\mathbb{E}^d$ tal que $q = p + \boldsymbol{v}$





- Denotamos $\boldsymbol{v}$ em (A3) por $\boldsymbol{pq}$.

Aula 2 – Fundamentos

- A combinação afim de um conjunto de pontos em $\mathbb{E}^d$:

- A combinação afim de um conjunto de pontos em $\mathbb{E}^d$:

  Seja
  $$p_0, \ldots, p_n$$
  uma sequência qualquer de $n+1$ pontos de $\mathbb{E}^d$ e seja
  $$\alpha_0, \ldots, \alpha_n$$
  uma sequência qualquer de $n+1$ números reais tais que
  $$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1\,.$$

- A combinação afim de um conjunto de pontos em $\mathbb{E}^d$:

  Denotamos por

  $$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \cdot p_i$$

  o ponto

  $$q = p_0 + \boldsymbol{v} \, ,$$

  em que

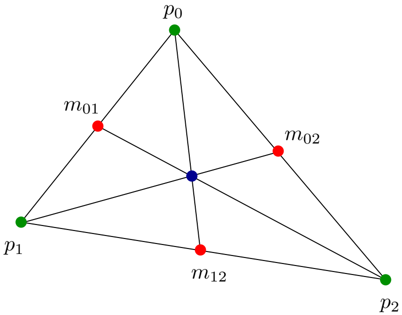
  $$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \boldsymbol{p_0 p_i}$$

  é a *combinação linear* dos vetores $\boldsymbol{p_0 p_1}, \ldots, \boldsymbol{p_0 p_n}$ obtida com os coeficientes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. O ponto q é o *baricentro* ou *combinação afim* dos pontos $p_0, p_1, \ldots, p_n$ associados aos *pesos* $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Aula 2 – Fundamentos

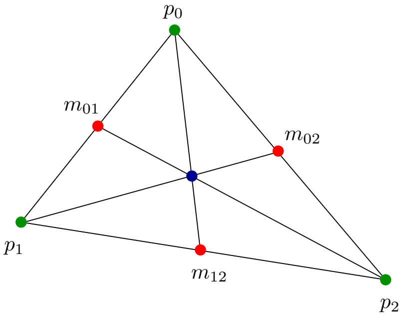
- Como interpretamos uma combinação afim?

- Como interpretamos uma combinação afim?
- Sejam p_0, p_1 e p_2 os vértices de um triângulo:



Aula 2 – Fundamentos

- Como interpretamos uma combinação afim?
- Sejam p_0, p_1 e p_2 os vértices de um triângulo:



- Vamos determinar (no quadro negro) o ponto

$$\frac{1}{3} \cdot p_0 + \frac{1}{3} \cdot p_1 + \frac{1}{3} \cdot p_2$$

- Quando $\alpha_i \geq 0$, para todo $i = 0, 1 \ldots, n$, dizemos que $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \cdot p_i$ é uma combinação convexa de $p_0, p_1, \ldots, p_n$ com *pesos* $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

- Quando $\alpha_i \geq 0$, para todo $i = 0, 1 \ldots, n$, dizemos que $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \cdot p_i$ é uma combinação convexa de $p_0, p_1, \ldots, p_n$ com *pesos* $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$.
- Dado

  $$P = \{p_1, \ldots, p_n\} \subset \mathbb{E}^d$$

  definimos o fecho convexo, $FC(P)$, de P como sendo o conjunto de todos os pontos obtidos por uma combinação *convexa* dos pontos de P:

  $$FC(P) = \left\{ p \in \mathbb{E}^d \mid p = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot p_i, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 \right\}$$

- Quando $\alpha_i \geq 0$, para todo $i = 0, 1 \ldots, n$, dizemos que $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \cdot p_i$ é uma combinação convexa de $p_0, p_1, \ldots, p_n$ com *pesos* $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$.
- Dado

$$P = \{p_1, \ldots, p_n\} \subset \mathbb{E}^d$$

definimos o fecho convexo, $FC(P)$, de P como sendo o conjunto de todos os pontos obtidos por uma combinação *convexa* dos pontos de P:

$$FC(P) = \left\{ p \in \mathbb{E}^d \mid p = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot p_i, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 \right\}$$

- Podemos mostrar que $FC(P)$ é um subconjunto *convexo* de $\mathbb{E}^d$.

Aula 2 – Fundamentos

- Quando $\alpha_i \geq 0$, para todo $i = 0, 1 \ldots, n$, dizemos que $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \cdot p_i$ é uma combinação convexa de $p_0, p_1, \ldots, p_n$ com *pesos* $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$.
- Dado

$$P = \{p_1, \ldots, p_n\} \subset \mathbb{E}^d$$

definimos o fecho convexo, $FC(P)$, de P como sendo o conjunto de todos os pontos obtidos por uma combinação *convexa* dos pontos de P:

$$FC(P) = \left\{ p \in \mathbb{E}^d \mid p = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot p_i, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 \right\}$$

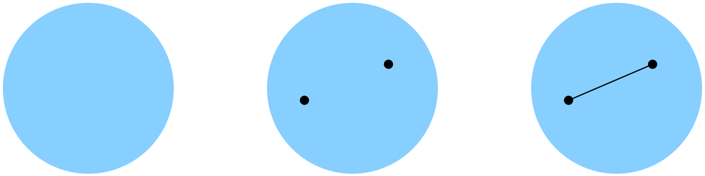
- Podemos mostrar que $FC(P)$ é um subconjunto *convexo* de $\mathbb{E}^d$.

Aula 2 – Fundamentos

- O que é um conjunto convexo?

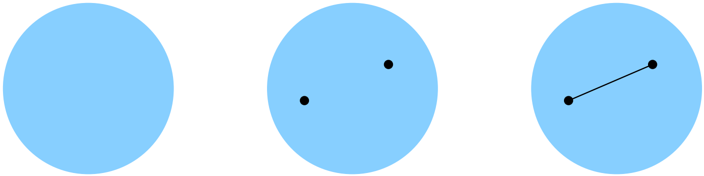
Aula 2 – Fundamentos

- O que é um conjunto convexo?
- Um subconjunto convexo de $\mathbb{E}^2$:

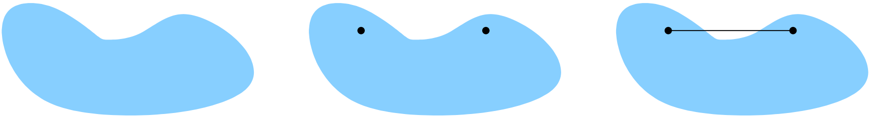


Aula 2 – Fundamentos

- O que é um conjunto convexo?
- Um subconjunto convexo de $\mathbb{E}^2$:



- Um subconjunto de $\mathbb{E}^2$ que não é convexo:

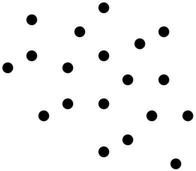


Aula 2 – Fundamentos

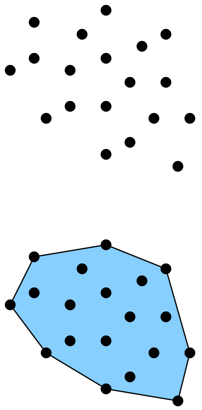
- Por que $FC(P)$ é um conjunto convexo?

Aula 2 – Fundamentos

- Por que $FC(P)$ é um conjunto convexo?

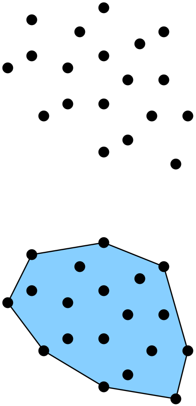


- Por que $FC(P)$ é um conjunto convexo?



Aula 2 – Fundamentos

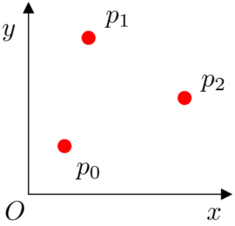
- Por que $FC(P)$ é um conjunto convexo?



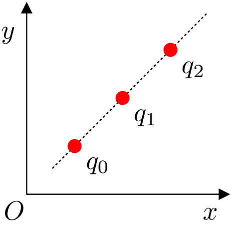
- $FC(P)$ é o "menor" conjunto convexo contendo todos os pontos de P!

Aula 2 – Fundamentos

- Um conjunto, $\{p_0, \ldots, p_n\} \subset \mathbb{E}^d$, é dito afimente independente (AI) se
$$\{\boldsymbol{p_i p_j} \mid j \in \{0, \ldots, n\} - \{i\}\}$$
é linearmente independente (LI) em $\mathbb{E}^d$ para algum i em $\{0, \ldots, n\}$. Se não for, o conjunto $\{p_0, \ldots, p_n\}$ é afimente dependente (AD).



AI

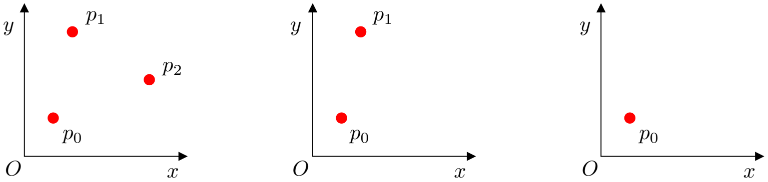


AD

Aula 2 – Fundamentos

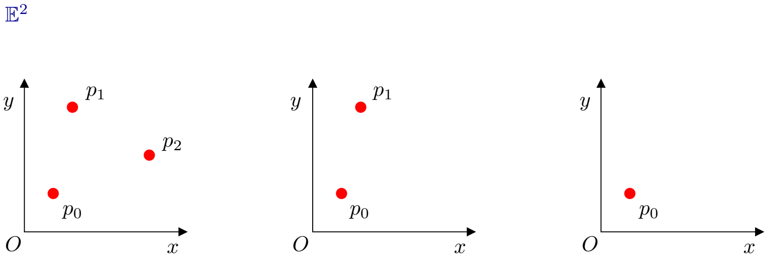
- Um subconjunto AI de $\mathbb{E}^d$ possui, no máximo, $d + 1$ pontos.

$\mathbb{E}^2$



Aula 2 – Fundamentos

- Um subconjunto AI de $\mathbb{E}^d$ possui, no máximo, $d+1$ pontos.

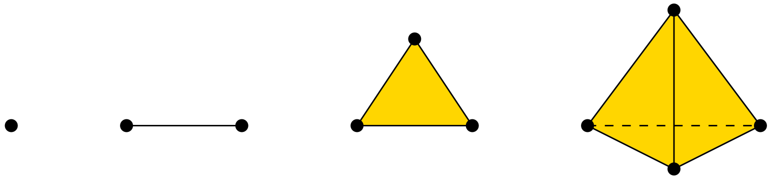


- Triangulações consistem de elementos (vértices, arestas e triângulos) que nada mais são do que o fecho convexo de um subconjunto AI em $\mathbb{E}^2$.

Aula 2 – Fundamentos

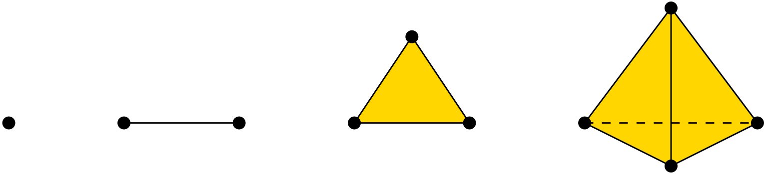
- Seja $P = \{p_0, \ldots, p_k\}$ um conjunto AI com $k + 1$ pontos de $\mathbb{E}^d$.

- Seja $P = \{p_0, \ldots, p_k\}$ um conjunto AI com $k+1$ pontos de $\mathbb{E}^d$.
- O simplexo σ gerado pelos pontos em P é o fecho convexo, $FC(P)$, de P.



Aula 2 – Fundamentos

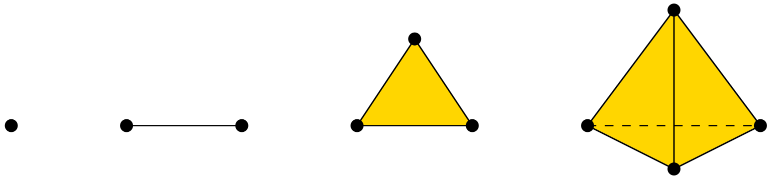
- Seja $P = \{p_0, \ldots, p_k\}$ um conjunto AI com $k+1$ pontos de $\mathbb{E}^d$.
- O simplexo σ gerado pelos pontos em P é o fecho convexo, $FC(P)$, de P.



- Os pontos $p_0, \ldots, p_k$ são os vértices de σ.

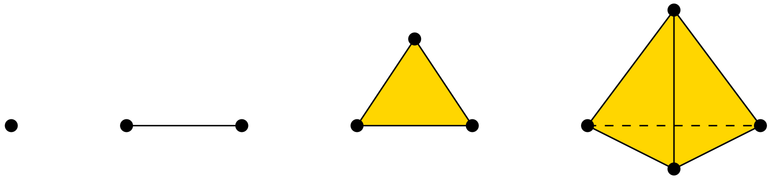
Aula 2 – Fundamentos

- Seja $P = \{p_0, \ldots, p_k\}$ um conjunto AI com $k+1$ pontos de $\mathbb{E}^d$.
- O simplexo σ gerado pelos pontos em P é o fecho convexo, $FC(P)$, de P.



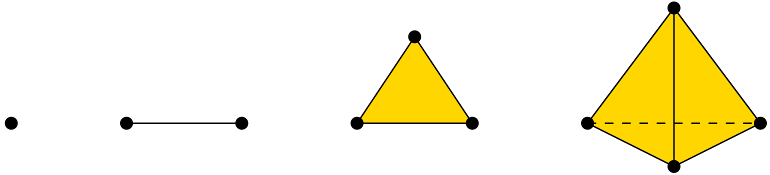
- Os pontos $p_0, \ldots, p_k$ são os vértices de σ.
- A dimensão, $dim(\sigma)$, de σ é k e σ é dito um k-simplexo.

- Seja $P = \{p_0, \ldots, p_k\}$ um conjunto AI com $k+1$ pontos de $\mathbb{E}^d$.
- O simplexo σ gerado pelos pontos em P é o fecho convexo, $FC(P)$, de P.



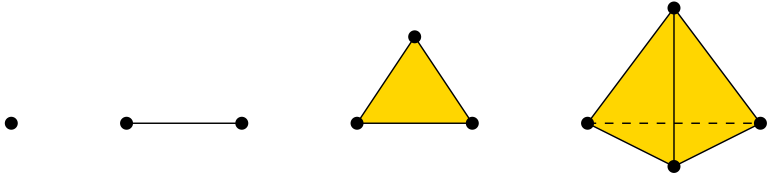
- Os pontos $p_0, \ldots, p_k$ são os vértices de σ.
- A dimensão, $dim(\sigma)$, de σ é k e σ é dito um k-simplexo.
- Em $\mathbb{E}^d$, há simplexos de dimensão $0, 1, \ldots, d$ apenas.

Aula 2 – Fundamentos



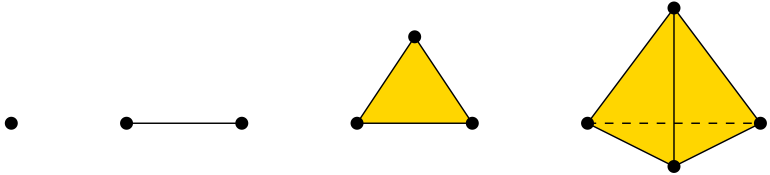
- Um 0-simplexo é um *ponto*.

Aula 2 – Fundamentos



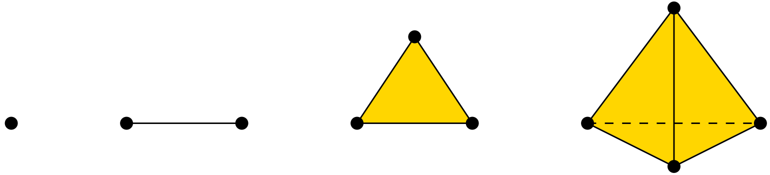
- Um 0-simplexo é um *ponto*.
- Um 1-simplexo é um *segmento de reta*.

Aula 2 – Fundamentos



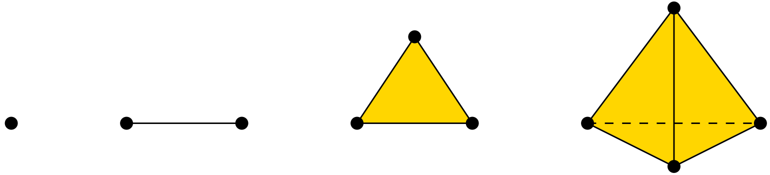
- Um 0-simplexo é um *ponto*.
- Um 1-simplexo é um *segmento de reta*.
- Um 2-simplexo é um *triângulo*.

Aula 2 – Fundamentos

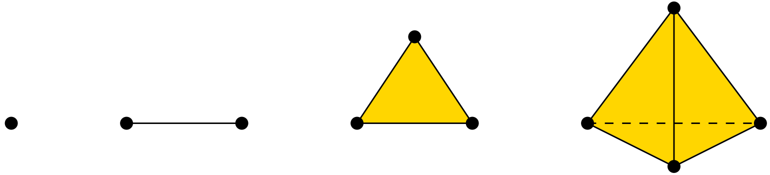


- Um 0-simplexo é um *ponto*.
- Um 1-simplexo é um *segmento de reta*.
- Um 2-simplexo é um *triângulo*.
- Um 3-simplexo é um *tetraedro*.

Aula 2 – Fundamentos

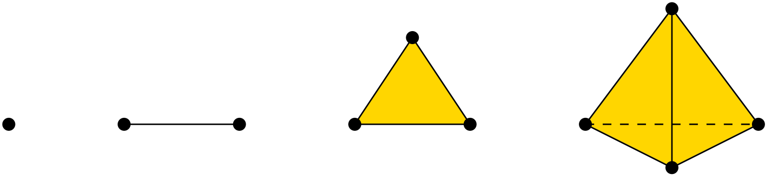


- Um 0-simplexo é um *ponto*.
- Um 1-simplexo é um *segmento de reta*.
- Um 2-simplexo é um *triângulo*.
- Um 3-simplexo é um *tetraedro*.
- O fecho convexo de qualquer subconjunto (próprio) não vazio do conjunto de vértices de σ também é um simplexo. (Por quê?)



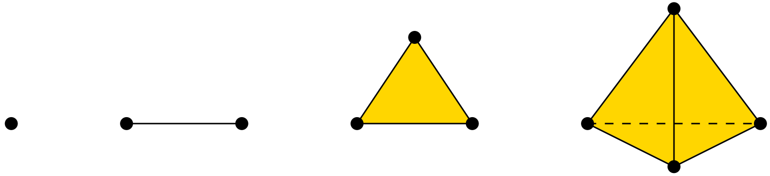
- Um 0-simplexo é um *ponto*.
- Um 1-simplexo é um *segmento de reta*.
- Um 2-simplexo é um *triângulo*.
- Um 3-simplexo é um *tetraedro*.
- O fecho convexo de qualquer subconjunto (próprio) não vazio do conjunto de vértices de σ também é um simplexo. (Por quê?)
- Este simplexo é denominado de face (própria) de σ.

Aula 2 – Fundamentos



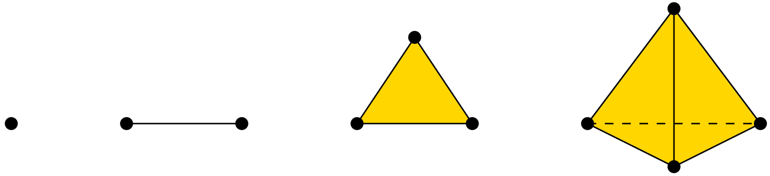
- Uma 0-face de σ é um vértice de σ.

Aula 2 – Fundamentos

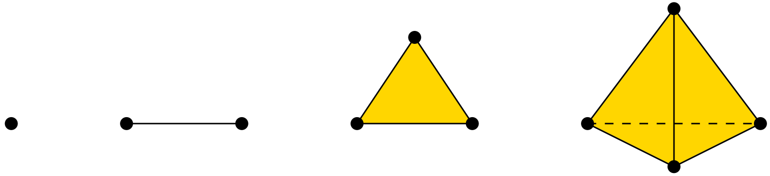


- Uma 0-face de σ é um vértice de σ.
- Uma 1-face de σ é uma aresta de σ.

Aula 2 – Fundamentos

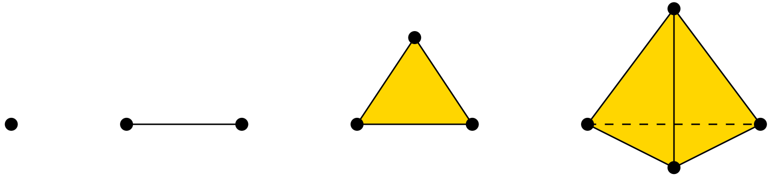


- Uma 0-face de σ é um vértice de σ.
- Uma 1-face de σ é uma aresta de σ.
- Uma $(d-1)$-face de um d-simplexo em $\mathbb{E}^d$ é denominada faceta.



- Uma 0-face de σ é um vértice de σ.
- Uma 1-face de σ é uma aresta de σ.
- Uma $(d-1)$-face de um d-simplexo em $\mathbb{E}^d$ é denominada faceta.

- 0-, 1- e 2-simplexos são os "componentes" das triangulações!



- Uma 0-face de σ é um vértice de σ.
- Uma 1-face de σ é uma aresta de σ.
- Uma $(d-1)$-face de um d-simplexo em $\mathbb{E}^d$ é denominada faceta.

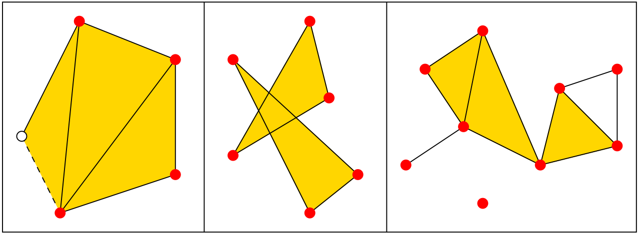
- 0-, 1- e 2-simplexos são os “componentes” das triangulações!
- Veremos agora como combiná-los para formar triangulações.

Aula 2 – Fundamentos

- Um complexo simplicial, $\mathcal{K}$, em $\mathbb{E}^d$ é um conjunto não vazio e finito de simplexos em $\mathbb{E}^d$ que goza das duas propriedades dadas a seguir:

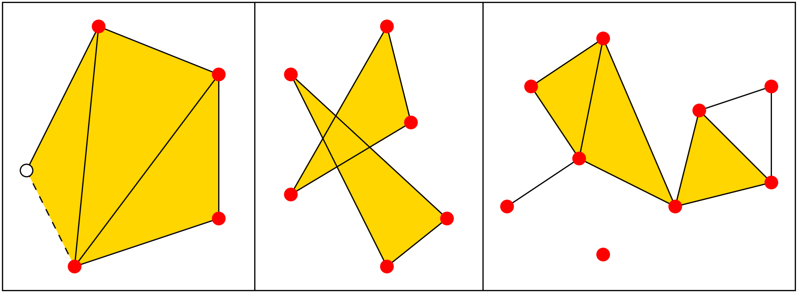
- Um complexo simplicial, $\mathcal{K}$, em $\mathbb{E}^d$ é um conjunto não vazio e finito de simplexos em $\mathbb{E}^d$ que goza das duas propriedades dadas a seguir:
  (1) se $\sigma \in \mathcal{K}$ e $\tau \preceq \sigma$ então $\tau \in \mathcal{K}$ e
  (2) se $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$ então $\sigma \cap \tau \preceq \sigma$ e $\sigma \cap \tau \preceq \tau$, para todo $\sigma, \tau \in \mathcal{K}$,

  em que $a \preceq b$ denota "a é uma face (não necessariamente própria) de b".



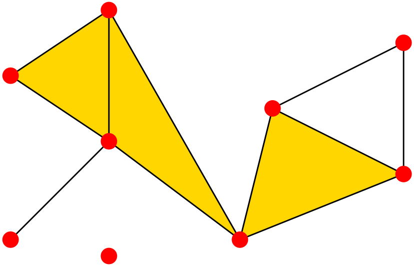
Viola (1) Viola (2) Goza de (1) e (2)

- A dimensão, $dim(\mathcal{K})$, de $\mathcal{K}$ é o maior valor entre as dimensões de todos os simplexos de $\mathcal{K}$. Um complexo simplicial de dimensão d (ou d-dimensional) é chamado, simplesmente, de d-complexo simplicial.

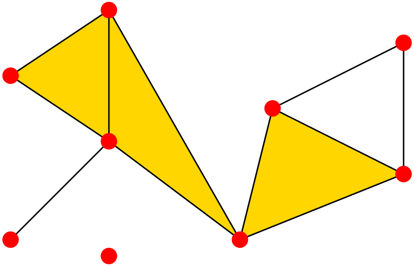


Viola (1) Viola (2) Goza de (1) e (2)

- Um complexo simplicial é um conjunto *discreto* (i.e., finito).

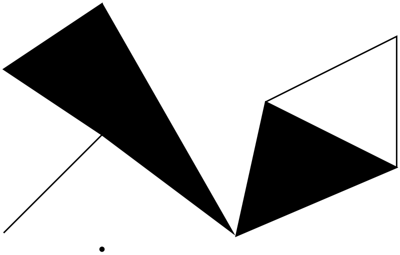


- Um complexo simplicial é um conjunto *discreto* (i.e., finito).

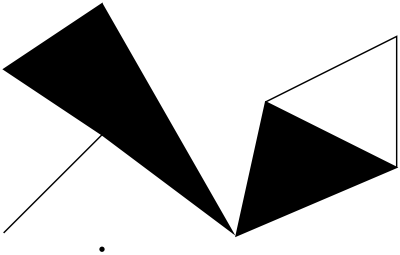


- Um k-simplexo, com $k \geq 1$, é um subconjunto (infinito) de pontos de $\mathbb{E}^d$.

- O subconjunto de $\mathbb{E}^d$ correspondente à união de todos os simplexos de um complexo simplicial, $\mathcal{K}$, é denominado de espaço subjacente de $\mathcal{K}$.



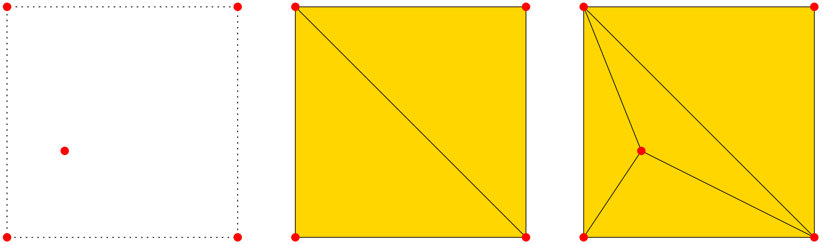
- O subconjunto de $\mathbb{E}^d$ correspondente à união de todos os simplexos de um complexo simplicial, $\mathcal{K}$, é denominado de espaço subjacente de $\mathcal{K}$.



- O espaço subjacente do complexo simplicial $\mathcal{K}$ é denotado por $|\mathcal{K}|$.

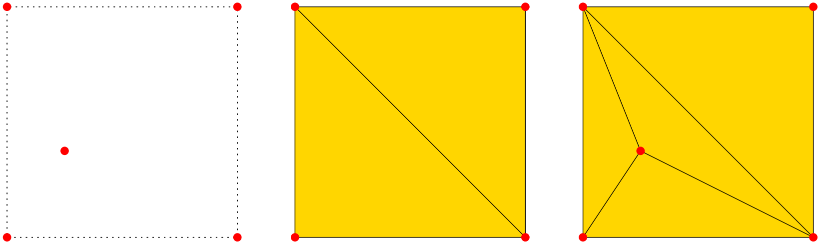
Aula 2 – Fundamentos

- Uma triangulação de um conjunto finito e não vazio, P, de pontos de $\mathbb{E}^d$ é um complexo simplicial, denotado por $\mathcal{T}(P)$, tal que todos os vértices pertencem a P e cujo espaço subjacente, $|\mathcal{T}(P)|$, é igual a $FC(P)$.



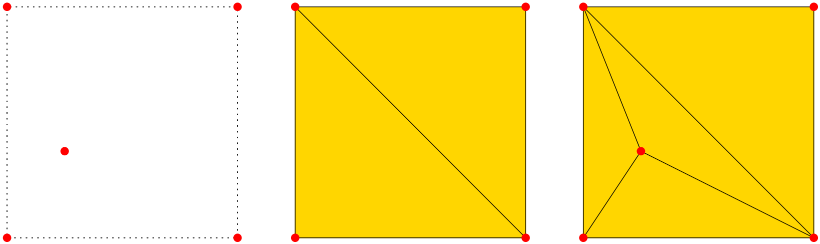
Aula 2 – Fundamentos

- Uma triangulação de um conjunto finito e não vazio, P, de pontos de $\mathbb{E}^d$ é um complexo simplicial, denotado por $\mathcal{T}(P)$, tal que todos os vértices pertencem a P e cujo espaço subjacente, $|\mathcal{T}(P)|$, é igual a $FC(P)$.



- Quando o conjunto de vértices de $\mathcal{T}(P)$ é o próprio P, dizemos que $\mathcal{T}(P)$ é uma triangulação cheia (veja a triangulação à direita acima).

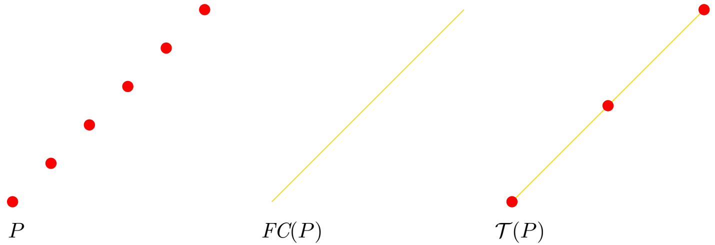
- Uma triangulação de um conjunto finito e não vazio, P, de pontos de $\mathbb{E}^d$ é um complexo simplicial, denotado por $\mathcal{T}(P)$, tal que todos os vértices pertencem a P e cujo espaço subjacente, $|\mathcal{T}(P)|$, é igual a $FC(P)$.



- Note que a definição não implica a existência de um d-simplexo em $\mathcal{T}(P)$.

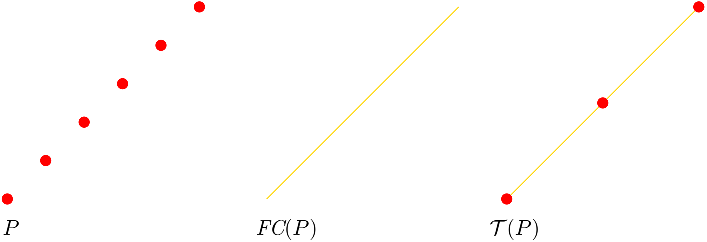
Aula 2 – Fundamentos

- Logo, o complexo abaixo à direita é uma triangulação de P em $\mathbb{E}^2$:



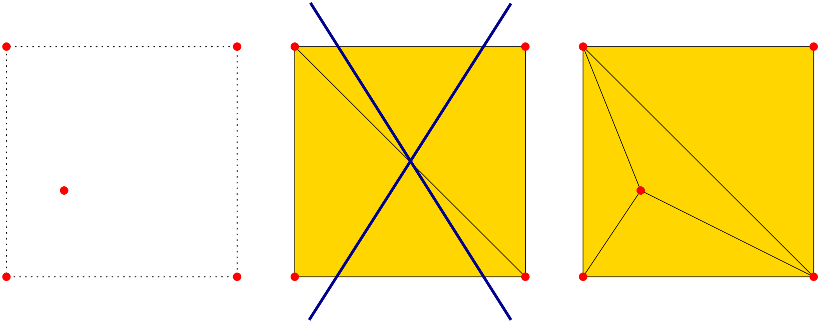
Aula 2 – Fundamentos

- Logo, o complexo abaixo à direita é uma triangulação de P em $\mathbb{E}^2$:



- Triangulações em $\mathbb{E}^d$ sem um d-simplexo são ditas degeneradas.

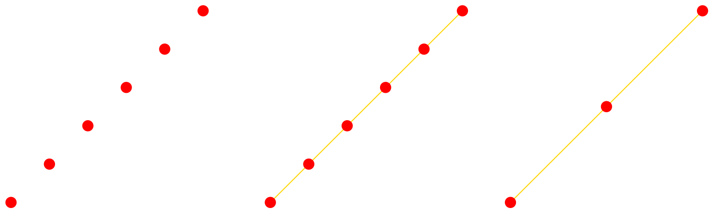
- De agora em diante, lidaremos apenas com triangulações cheias em $\mathbb{E}^2$...



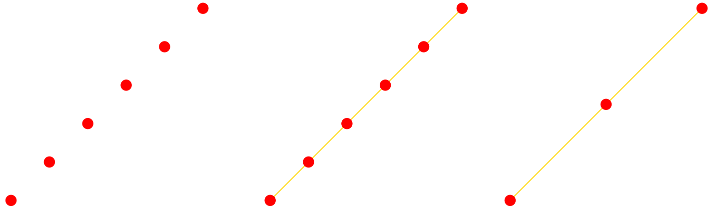
- ... e, por esta razão, omitiremos a palavra *cheia* daqui em diante.

Aula 2 – Fundamentos

- Mas, as triangulações (cheias) podem ou não ser degeneradas...



- Mas, as triangulações (cheias) podem ou não ser degeneradas...



- Na próxima aula, veremos um tipo especial de triangulação em $\mathbb{E}^2$.

Exercícios

- Sugerimos a resolução dos seguintes problemas do livro:
  - 2.1
  - 2.2
  - 3.8
  - 3.10

Exercícios

- Sugerimos a resolução dos seguintes problemas do livro:
  - 2.1
  - 2.2
  - 3.8
  - 3.10
- Os problemas acima estão relacionados ao assunto da aula 2.